原点死滅過程に対する調和関数について

矢野, 孝次

原点死滅過程に対する調和関数について

矢野 孝次* (京都大学大学院理学研究科)

概 要

原点死滅過程に対する調和関数が存在して正値であるとき，その調和変換を用いて周遊測度の積分分解公式が一般に得られる．しかしながら，調和関数の存在および正値性は一般にはわからない．本報告では，一次元レヴィ過程の場合の結果をまとめる．

1 序

$E=[0,\infty)$ 上の原点反射壁ブラウン運動を $\{X(t),\mathbb{P}_x\}$ と書き，原点吸収壁のそれを $\{X(t),\mathbb{P}_x^0\}$ と書く．原点まわりの周遊点過程の特性測度を $\boldsymbol{n}$ と書く．このとき，関数 $h(x)=x$ は

$$\mathbb{E}_x^0[h(X(t))]=h(x) \quad \text{for all } t>0 \text{ and all } x\in E \tag{1.1}$$

を満たし，かつある有限な定数 c_0(局所時間の選び方に応じて決まる) が存在して

$$\boldsymbol{n}[h(X(t))]=c_0 \quad \text{for all } t>0 \tag{1.2}$$

を満たす．さらに，

$$\text{for } A\in\mathcal{F}_t, \quad \mathbb{P}_x^h(A)=\begin{cases}\frac{1}{h(x)}\mathbb{E}_x^0[h(X(t));A] & \text{if } x\in E\setminus\{0\}\\ \frac{1}{c_0}\boldsymbol{n}[h(X(t));A] & \text{if } x=0\end{cases} \tag{1.3}$$

で定まる過程 $\{X(t),\mathbb{P}_x^h\}$ は 3 次元ベッセル過程であり，周遊測度 $\boldsymbol{n}$ の積分分解公式

$$\boldsymbol{n}(\cdot)=\int_0^\infty \mathbb{P}_0^h(\cdot|X(t)=0)\rho(t)\mathrm{d}t \tag{1.4}$$

が成り立つ．但し，$\rho(t)$ は $t^{-3/2}$ の定数倍である．

一般に，非負関数 $h(x)$ が (1.1) および (1.2) を満たすとき，(原点死滅過程に対する) **調和関数**と呼ぶことにする．上で述べたことはもっと一般に成り立つ．実際，一次元拡散過程はスケール関数を，あるいはまた対称レヴィ過程 ([8]) は修正 0 レゾルベントを，それぞれ調和関数に持ち，積分分解公式

$$\boldsymbol{n}(\cdot)=\int_0^\infty \mathbb{P}_0^h(\cdot|X(t)=0)\rho(t)\mathrm{d}t+\kappa\mathbb{P}_0^h(\cdot) \tag{1.5}$$

が成り立つ．但し，κ は非再帰性のパラメタである．しかしながら，一般には調和関数が存在するか否かわからない．本報告の目的は，一次元レヴィ過程の場合について，結果をまとめるとともに，非対称の場合の問題点について述べることである．

*Email: kyano@math.kyoto-u.ac.jp

2 調和関数と積分分解公式

ここでは，一次元レヴィ過程の場合に限って述べる (実際はもっと一般な仮定の下で議論を展開することができる).

$\{X(t), \mathbb{P}_x\}$ を一次元レヴィ過程とする．レヴィ–ヒンチン指数を $\Psi(\lambda)$ と書くと，$\lambda \in \mathbb{R}$ のとき $\mathbb{E}_0[\mathrm{e}^{i\lambda X(t)}] = \mathrm{e}^{-t\Psi(\lambda)}$ であり，定数 $b \in \mathbb{R}$ と $v \geq 0$ およびレヴィ測度 ν を用いて

$$\Psi(\lambda) = ib\lambda + v\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x 1_{(-1,1)}(x)\right) \nu(\mathrm{d}x) \tag{2.1}$$

と表される．但し，ν は $\nu(\{0\}) = 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}}(|x|^2 \wedge 1)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$ を満たす．$\Psi(\lambda)$ の実部および虚部をそれぞれ $\theta(\lambda)$ および $\omega(\lambda)$ と書く:

$$\theta(\lambda) = \mathrm{Re}\,\Psi(\lambda) = v\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos\lambda x)\, \nu(\mathrm{d}x), \tag{2.2}$$

$$\omega(\lambda) = \mathrm{Im}\,\Psi(\lambda) = b\lambda + \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda x 1_{(-1,1)}(x) - \sin\lambda x\right) \nu(\mathrm{d}x). \tag{2.3}$$

ここで，θ は非負の偶関数，ω は奇関数であることに注意する．

点 $x \in \mathbb{R}$ の到達時刻を

$$T_x = \inf\{t > 0 : X(t) = x\} \tag{2.4}$$

と書く．**原点正則**とは，$\mathbb{P}_0(T_0 = 0) = 1$ が成り立つことを言う．原点正則かつ複合ポアソンのためには，以下の条件が必要十分である (Kesten [4] and Bretagnolle [1]):

(L1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\,\frac{1}{q+\Psi(\lambda)}\mathrm{d}\lambda < \infty$ for all $q > 0$;

(L2) either $v > 0$ or $\displaystyle\int_{(-1,1)} |x|\nu(\mathrm{d}x) = \infty$.

条件 **(L1)** より強い次の条件を導入する:

(L1′) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{q+\theta(\lambda)}\mathrm{d}\lambda < \infty$ for all $q > 0$.

以下，条件 **(L1′)** および **(L2)** を仮定する．条件 **(L1′)** より $|\mathrm{e}^{-t\Psi(\lambda)}| = \mathrm{e}^{-t\theta(\lambda)} \in L^1(\mathrm{d}\lambda)$ が成り立ち，フーリエ逆変換により

$$p_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{-i\lambda x - t\Psi(\lambda)}\mathrm{d}\lambda, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

が推移確率密度を与える:

$$\mathbb{E}_x[f(X(t))] = \int_{\mathbb{R}} f(y)p_t(y-x)\mathrm{d}y. \tag{2.6}$$

さらに，条件 (**L1′**) により，$p_t(x)$ のラプラス変換

$$r_q(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}p_t(x)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\lambda x}}{q+\Psi(\lambda)}\mathrm{d}\lambda \tag{2.7}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{(q+\theta(\lambda))\cos\lambda x + \omega(\lambda)\sin\lambda x}{(q+\theta(\lambda))^2+\omega(\lambda)^2}\mathrm{d}\lambda \tag{2.8}$$

(但し $q>0$) が存在して，レゾルベント密度を与える:

$$R_q f(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}f(X(t))\mathrm{d}t\right] = \int_{\mathbb{R}} f(y)r_q(y-x)\mathrm{d}y. \tag{2.9}$$

実数値 càdlàg path 全体を $\mathbb{D}$ で表し，

$$\mathbb{D}^0 = \{w \in \mathbb{D} : w(t) = w(t\wedge T_0) \text{ for all } t \geq 0\} \tag{2.10}$$

とおく．集合 $\mathbb{D}^0$ に属する path を **excursion** とも呼ぶ．座標過程を $X(t)$ で表す: $X(t)(w) = w(t)$ for $w \in \mathbb{D}$ and $t \geq 0$. 座標過程に関する自然な filtration を

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X(s) : s \leq t) \tag{2.11}$$

と書く．原点正則性より，**原点局所時間** $L(t)$ が存在する，すなわち，正値連続加法的汎関数であって，X が原点にいるときのみ増加，すなわち

$$\int_0^\infty 1_{\{X(t)\neq 0\}}\mathrm{d}L(t) = 0 \tag{2.12}$$

を満たすものが存在し，定数の差を除いて一意である．さらに，$L(t)$ として次式を満たす version がとれる:

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\mathrm{d}L(t)\right] = r_q(-x) \quad \text{for all } q>0 \text{ and } x\in\mathbb{R}. \tag{2.13}$$

強マルコフ性より

$$\mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-qT_0}\right] = \frac{r_q(-x)}{r_q(0)}, \quad q>0,\ x\in\mathbb{R} \tag{2.14}$$

が成り立つことに注意しておく．式 (2.13) 局所時間の右連続逆過程を $\eta(l)$ と書く:

$$\eta(l) = \inf\{t\geq 0 : L(t) > l\} \quad \text{for } l \geq 0. \tag{2.15}$$

このとき，過程 $\{\eta(l), \mathbb{P}_0\}$ は subordinator であり，$X(t)$ が非再帰的なときは時刻 $\lambda := L(\infty)$ で爆発する．ここで一般に，$\mathbb{D}$ 上の σ-有限測度 $\boldsymbol{n}$ であって

$$\boldsymbol{n}[T_0 \wedge 1] < \infty, \quad \boldsymbol{n}(\mathbb{D}) = \infty \quad \text{and} \quad \boldsymbol{n}(\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}^0) = 0 \tag{2.16}$$

を満たすものをとり，それを特性測度とするポアソン点過程 $p(l) = (p(l;t))_{t \geq 0}$ on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を考える．これについて

$$\eta_p(l) = \sum_{s \leq l} T_0(p(s)) \tag{2.17}$$

とおき，

$$\lambda_p = \inf\{l > 0 : \eta_p(l) = \infty\} \tag{2.18}$$

とおく．条件 (2.16) より $\eta_p(l)$ は $l \in [0, \lambda_p)$ について狭義増加であり，従って連続な逆過程 $L_p(t)$ が存在する．こうして

$$X_p(t) = \begin{cases} p(l; t - \eta_p(l-)) & \text{if } \eta_p(l-) \leq t < \eta_p(l) \text{ for some } l \in [0, \lambda_p], \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.19}$$

とおく．次の定理は Itô [3] および Meyer [5] による．

Theorem 2.1 ([3] and [5]). 条件 (2.16) を満たし，かつ

$$\{\eta_p, L_p, X_p, \lambda_p, \mathbb{P}\} \overset{\text{law}}{=} \{\eta, L, X, \lambda, \mathbb{P}_0\} \tag{2.20}$$

を満たす $\mathbb{D}$ 上の σ-有限測度 $\boldsymbol{n}$ が一意的に存在する．この測度 $\boldsymbol{n}$ を**周遊測度**と呼ぶ．

ポアソン点過程の compensation formula により，次が成り立つ．

Theorem 2.2. 任意の非負可測関数 f に対し，

$$\boldsymbol{n}\left[\int_0^{T_0} \mathrm{e}^{-qt} f(X(t)) \mathrm{d}t\right] = \frac{1}{r_q(0)} \int_{\mathbb{R}} f(y) r_q(y) \mathrm{d}y. \tag{2.21}$$

特に，$f \equiv 1$ として，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt} \boldsymbol{n}(T_0 > t) \mathrm{d}t = \frac{1}{q r_q(0)}. \tag{2.22}$$

q 倍して $q \to 0+$ とすると

$$\kappa := \boldsymbol{n}(T_0 = \infty) = \lim_{q \to 0+} \frac{1}{r_q(0)} \tag{2.23}$$

である．$X(t)$ が再帰的なら $\kappa = 0$，非再帰的なら > 0 である．

ここで，$E=\mathbb{R}$ とする．非負関数 $h(x)$ が調和関数であるとは，(1.1) および (1.2) を満たすことと定義する．この条件は次の条件と同値である:

$$qR_q h(x) = h(x) + r_q(-x) \quad \text{for all } q>0 \text{ and } x \in E. \tag{2.24}$$

Theorem 2.3. *以下の条件を仮定する:*

(H) *h は調和関数であって $x \in E \setminus \{0\}$ において常に $h(x)>0$;*

(T) *密度関数 $\rho(t)$ が存在して $\boldsymbol{n}(T_0 \in \mathrm{d}t) = \rho(t)\mathrm{d}t$ on $(0,\infty)$.*

このとき，周遊測度 $\boldsymbol{n}$ は次の積分分解公式を満たす:

$$\boldsymbol{n}(\cdot) = \int_0^\infty \mathbb{P}_0^h(\cdot|X(t-)=0)\rho(t)\mathrm{d}t + \kappa\mathbb{P}_0^h(\cdot). \tag{2.25}$$

但し，$\{X(t), \mathbb{P}_x^h\}$ は式 (1.3) で定まる**調和変換**である．

この定理の仮定 **(H)** と **(T)** とがともに満たされているかどうかを問いたい．

3 修正 0 レゾルベント

一次元レヴィ過程の調和関数の候補を与えるため，

$$h_q(x) = r_q(0) - r_q(-x), \quad q>0, \ x \in E \tag{3.1}$$

とおく．極限 $h_0 := \lim_{q\to 0+} h_q$ がもし存在するとき，それを**修正 0 レゾルベント**と呼ぶ．

Proposition 3.1 ([9])**.** *修正 0 レゾルベント h_0 が存在すると仮定する．このとき，*

$$R_q h_0(x) < \infty \quad \textit{for all } q>0 \textit{ and all } x \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

さらに，ある非負可測関数 $f(x)$ であって

$$R_q f(x) < \infty \quad \textit{for all } q>0 \textit{ and all } x \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

かつ

$$h_q(x) \le f(x) \quad \textit{for all } q>0 \textit{ and all } x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

なるものが存在したと仮定する．このとき，h_0 は調和関数である．

Proof. レゾルベント方程式

$$r_q(z-x) - r_p(z-x) + (q-p)\int_{\mathbb{R}} r_q(y-x) r_p(z-y)\mathrm{d}y = 0 \tag{3.5}$$

により，$q>0$および$p>0$に対して

$$R_q h_p(x) = \frac{h_p(x)}{q-p} + \frac{r_q(-x)}{q-p} - \frac{p r_p(0)}{q(q-p)}. \tag{3.6}$$

ここで，

$$\lim_{p\to 0+} p r_p(0) = 0 \tag{3.7}$$

が成り立つことに注意する (証明は [9] を見よ) と，Fatou's lemma より

$$q R_q h_0(x) \le \liminf_{p\to 0+} q R_q h_p(x) = h_0(x) + r_q(-x) < \infty. \tag{3.8}$$

また，優関数 f の存在を仮定すると，優収束定理により $R_q h_p \to R_q h_0$ が成り立ち，$h=h_0$ に対して (2.24) を得る．よって h_0 は調和関数であると言えた． □

Remark 3.2. 修正 0 レゾルベント h_0 が存在するとき，式 (2.14) より

$$r_q(0)\mathbb{E}_x\left[1-\mathrm{e}^{-qT_0}\right] \to h_0(x) \quad \text{as } q\to 0+ \tag{3.9}$$

が成り立つ．さらにもし，$\alpha>0$ として $r_q(0)$ の正則変動性

$$r_q(0) \sim c_r q^{\frac{1}{\alpha}-1} \quad \text{as } q\to 0+ \tag{3.10}$$

が満たされるならば，$h_0(x)>0$ なる任意の点 $x\in E$ において，原点到達時刻の漸近挙動

$$\mathbb{P}_x(T_0>t) \sim \frac{h_0(x)}{c_r\Gamma(1/\alpha)} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \quad \text{as } t\to\infty \tag{3.11}$$

が Tauber 型定理より得られる．

対称な場合

対称な場合，それは $\omega(\lambda)\equiv 0$ の場合であるが，この場合は $q\downarrow 0$ のとき $h_q(x)\uparrow h_0(x)$ であり，条件 **(H)** が満たされることが容易に示される．また，

$$r_q(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{q+\theta(\lambda)}\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,\infty)} \frac{1}{q+\xi}\sigma(\mathrm{d}\xi) \tag{3.12}$$

と表せる測度 σ がとれることから，

$$\frac{1}{q r_q(0)} = \int_{[0,\infty)} \frac{1}{q+\xi}\sigma^*(\mathrm{d}\xi) \quad \text{for all } q>0 \tag{3.13}$$

と表せる測度 σ^* がとれて，次の定理が成り立つ．

Theorem 3.3 ([8]). 条件 **(L1′)** および **(L2)** に加えて対称性を仮定する．このとき，

$$\rho(t) = \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-t\xi} \xi \sigma^*(\mathrm{d}\xi), \quad \kappa = \sigma^*(\{0\}) \tag{3.14}$$

として条件 **(T)** が満たされる．さらに，条件 **(H)** を満たす h_0 が存在し，

$$h_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \lambda x}{\theta(\lambda)} \mathrm{d}\lambda \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

狭義安定過程の場合

ブラウン運動の場合を除いた狭義安定過程の場合は，レヴィ測度が

$$\nu(\mathrm{d}x) = \begin{cases} c_+ |x|^{-\alpha-1} \mathrm{d}x & \text{on } (0,\infty) \\ c_- |x|^{-\alpha-1} \mathrm{d}x & \text{on } (-\infty, 0) \end{cases} \tag{3.16}$$

の形で与えられ，レヴィ–ヒンチン指数が

$$\Psi(\lambda) = c_\theta |\lambda|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(\lambda) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) \tag{3.17}$$

の形で与えられる．ここで，原点正則性の過程より $1 < \alpha < 2$ であり，c_+ と c_- は正の定数で $c_+ + c_- > 0$ であり，$S_\alpha = 2\Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}$ とおくと，$c_\theta > 0$ と $\beta \in [-1, 1]$ は

$$c_\theta = (c_+ + c_-) \frac{\pi}{\alpha S_\alpha}, \quad \beta = \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-}, \tag{3.18}$$

で与えられる．このとき

$$\theta(\lambda) = c_\theta |\lambda|^\alpha \quad \text{and} \quad \omega(\lambda) = c_\omega |\lambda|^\alpha \operatorname{sgn}(\lambda) \tag{3.19}$$

である．但し，$c_\omega = c_\theta \beta \cdot (-\tan \frac{\pi\alpha}{2})$．また，$c_p$, c_r を正定数として

$$p_t(0) = c_p t^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad r_q(0) = c_r q^{\frac{1}{\alpha}-1} \tag{3.20}$$

が成り立つ．公式 (2.22) により，

$$\rho(t) = \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{c_r \Gamma(\frac{1}{\alpha})} t^{\frac{1}{\alpha}-2} \tag{3.21}$$

として条件 **(T)** が満たされる．また，修正 0 レゾルベントが存在して

$$h_0(x) = \frac{1 - \beta \operatorname{sgn}(x)}{c_\theta \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2}\right) C_\alpha} |x|^{\alpha-1}, \tag{3.22}$$

で与えられる (cf. Port [6])．但し，$C_\alpha = 2\Gamma(\alpha) \cdot (-\cos \frac{\pi\alpha}{2})$．さらに，$h_0$ は調和関数である (詳細は [9] を見よ．なお，$\beta = \pm 1$ で $\pm x < 0$ の場合は Silverstein [7, Theorem 2])．この式より，$-1 < \beta < 1$ のときは $h = h_0$ として条件 **(H)** が満たされる．一方，$\beta = \pm 1$ のときは，$\pm x \geq 0$ のとき $h_0(x) = 0$ であり，$h = h_0$ は条件 **(H)** を満たさない．

Remark 3.4. $\beta = 1$ の場合，負の跳びがないから，周遊路は以下のどちらかに限られる:

(i) 時刻 T_0 まで正の値のみをとる．

(ii) はじめ負の値をとり，ある時刻で正に変わり，その後時刻 T_0 まで正の値のみとる．

しかしながら，上のいずれもが実現し得るのかどうかは不明で，周遊測度の性質はよくわかっていない．なお，末尾確率 $\mathbb{P}_x(T_0 > t)$ の漸近挙動について，$x < 0$ のときは Port [6, Theorem 2] により，$x > 0$ のときは Chaumont [2, pp.386] により，

$$\mathbb{P}_x(T_0 > t) \sim \begin{cases} C_+(\alpha, 1) t^{-\frac{1}{\alpha}} x & \text{if } x > 0 \\ C_-(\alpha, 1) t^{-\rho} |x|^{\alpha - 1} & \text{if } x < 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

が知られている．但し，$\rho = 1 - \frac{1}{\alpha}$ であり，$C_+(\alpha, 1)$ と $C_-(\alpha, 1)$ は正定数.

Remark 3.5. 非対称な場合には一般論はないが，[9] において，条件 **(H)** および **(T)** の十分条件を，$-1 < \beta < 1$ に対する狭義対称安定過程を少し緩めた形で与えている．

参考文献

[1] J. Bretagnolle. Résultats de Kesten sur les processus à accroissements indépendants. In *Séminaire de Probabilités, V (Univ. Strasbourg, année universitaire 1969-1970)*, pages 21–36. Lecture Notes in Math., Vol. 191. Springer, Berlin, 1971.

[2] L. Chaumont. Excursion normalisée, méandre et pont pour les processus de Lévy stables. *Bull. Sci. Math.*, 121(5):377–403, 1997.

[3] K. Itô. Poisson point processes attached to Markov processes. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. III: Probability theory*, pages 225–239, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.

[4] H. Kesten. *Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 93. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[5] P. A. Meyer. Processus de Poisson ponctuels, d'après K. Ito. In *Séminaire de Probabilités, V (Univ. Strasbourg, année universitaire 1969–1970)*, pages 177–190. Lecture Notes in Math., Vol. 191. Springer, Berlin, 1971. Erratum in p. 253, Séminaire de Probabilités, VI, Lecture Notes in Math., Vol. 258, 1972.

[6] S. C. Port. Hitting times and potentials for recurrent stable processes. *J. Analyse Math.*, 20:371–395, 1967.

[7] M. L. Silverstein. Classification of coharmonic and coinvariant functions for a Lévy process. *Ann. Probab.*, 8(3):539–575, 1980.

[8] K. Yano. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Lévy processes without Gaussian part. *Potential Anal.*, 32(4):305–341, 2010.

[9] K. Yano. On harmonic function for the killed process upon hitting zero of asymmetric Lévy processes. *J. Math-for-Ind.*, to appear.